PART3 組立除法と因数分解

要点 ① 組立除法と因数分解

3 次式 $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ を 1 次式 $x-k$ で割ったときの商を $Q(x)=Ax^2+Bx+C$, 余りを R とする。除法の原理により, $P(x)=(x-k)Q(x)+R$, すなわち

$$ax^3+bx^2+cx+d=(x-k)\left(Ax^2+Bx+C\right)+R$$

が成り立つ。この等式の右辺を x について整理すると

$$Ax^3+(B-Ak)x^2+(C-Bk)x+(R-Ck)$$

これを左辺と係数比較して

$$A=a,\ B-Ak=b,\ C-Bk=c,\ R-Ck=d$$

つまり, $A=a$, $B=b+Ak$, $C=c+Bk$, $R=d+Ck$

これを図示すると, 以下のようになる。

a	b	c	d
	Ak	Bk	Ck
A	B	C	R

これを用いると, 多項式 $P(x)$ を 1 次式で割ったときの商と余りを求めることができる。

例 $2x^3-5x^2+3x+10$ を $x-2$, $x+1$ で割ったときの商と余りをそれぞれ求める。

2	-5	3	10	$\lfloor$

商　　　　余り

2	-5	3	10	$\lfloor$

商　　　　余り

この方法を「　　　　」という。

多項式 $P(x)$ を 1 次式 $x-k$ で割ったときの商 $Q(x)$ と余り R を求める簡便な方法として, この組立除法が用いられる。特に, $R=0$ になるとき, $P(x)$ は $x-k$ で割り切れる, すなわち, $x-k$ を因数にもち, $P(x)=(x-k)Q(x)$ の形で表される。

[MEMO]

3 組立除法を用いて，多項式 $x^3+x^2-21x-45$ を因数分解せよ。

Point Pickup

組立除法を用いた因数分解

① $P(x)$ を $x-k$ で割ったときの商 $Q(x)$ と余り R を組立除法で求める。

k の値の候補は，$\pm\dfrac{\text{定数項の約数}}{\text{最高次の項の係数の約数}}$ である。

② ①において $R=0$ のとき $P(x)=(x-k)Q(x)$ と表される。

③ $Q(x)$ を因数分解する。

第 4 講　PART3 確認問題

1　$P(x)=x^3-x^2-2x-12$ において，

$P(\boxed{ア})=0$ であるから，組立除法を使うと，次のようになる。

1	-1	-2	-12	$\boxed{ア}$
	$\boxed{ア}$	6	12	
1	$\boxed{イ}$	$\boxed{ウ}$	0	

よって

$$P(x)=(x-\boxed{エ})(x^2+\boxed{オ}x+\boxed{カ})$$

PART3 組立除法と因数分解

3 組立除法を用いて，多項式 $x^3+x^2-21x-45$ を因数分解せよ。

[解答]

$P(x)=x^3+x^2-21x-45$ とおくと

$$P(-3)=(-3)^3+(-3)^2-21\cdot(-3)-45=0$$

よって，$P(x)$ は $x+3$ を因数にもつ。

組立除法により，$P(x)$ を $x+3$ で割ると，

1	1	−21	−45	−3
	−3	6	45	
1	−2	−15	0	

商は $x^2-2x-15$

したがって

$$\begin{aligned} x^3+x^2-21x-45 &= (x+3)(x^2-2x-15) \\ &= (x+3)(x+3)(x-5) \\ &= (x+3)^2(x-5) \end{aligned}$$

第 4 講　PART3 確認問題 解答

1　**[正解]** ア：3，イ：2，ウ：4，エ：3，オ：2，
カ：4

[解説]

$P(x)=x^3-x^2-2x-12$ とおくと

$$P(3)=3^3-3^2-2\cdot3-12$$
$$=27-9-6-12=0$$

よって，$P(x)$ は $x-3$ を因数にもつ。[A]

組立除法により，$P(x)$ を $x-3$ で割ると，次のようになる。

1	−1	−2	−12	3
	3	6	12	
1	2	4	0	

[A]

商は x^2+2x+4，余りは 0 であるから

$$P(x)=(\boldsymbol{x-3})(\boldsymbol{x^2+2x+4})$$ [A]

[A]　組立除法を用いた因数分解
① $P(x)$ を $x-k$ で割ったときの商 $Q(x)$ と余り R を組立除法で求める。
k の値の候補は
$$\pm\frac{\text{定数項の約数}}{\text{最高次の項の係数の約数}}$$
である。
② ①において $R=0$ のとき
$P(x)=(x-k)Q(x)$ と表される。
③ $Q(x)$ を因数分解する。